

# Control por computadora para sistemas inestables con grandes retardos empleando un esquema observador.

Carlos Daniel Vázquez Rosas, Jazmín Ramírez Hernández

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F, 04430

E-mail: carlos\_daniel\_vaz@hotmail.com, jazzrh@hotmail.com

**Resumen-** Este trabajo considera el problema de estabilización de un sistema lineal con retardo grande en el lazo directo. Esto se logra mediante la retroalimentación estática de estados estimados obtenidos del diseño de un esquema observador discreto que incluye el retardo de la planta. El sistema se logra estabilizar mediante la reubicación de los polos dentro de la zona de estabilidad en el plano discreto. El sistema de control es implementado en Matlab-Simulink para una planta que se conecta mediante una tarjeta de adquisición de datos y comprobar así que el esquema de control estabiliza sistemas físicos con retardos dos veces más grandes a la constante de tiempo dominante del sistema.

**Palabras clave:** Observador, retenedor orden cero, tarjeta adquisición de datos, retardo, inestable.

## I. INTRODUCCIÓN.

En los procesos industriales es común encontrar retardos en los modelos matemáticos que los representan; la teoría de los sistemas continuos con retardo es complicada ya que resultan de dimensión infinita, pero el sistema muestreado correspondiente es de dimensión finita, produciendo una función de transferencia racional en la variable compleja  $z$  [1] que permite que los retardos sean considerablemente más simples de manejar si el sistema es muestreado. Los retardos de tiempo deben su origen a diversas circunstancias, tales como transporte de material, transporte de fluidos, de información, incluso en la aproximación de sistemas de alto orden a sistemas de bajo orden [2].

Diversas estrategias se han propuesto para afrontar el problema de la estabilidad de sistemas con retardo, una de ellas es el predictor de Smith[3], sin embargo, ésta solución tiene muchas limitaciones, como su poca robustez y que no se puede utilizar en sistemas inestables[4]. En la literatura se pueden encontrar diversas modificaciones de la estructura original propuesta por Smith que tienen como objetivo poder utilizarse en sistemas inestables[5], afrontar el problema de tener grandes retardos como el presentado en [6], que logra el control de un sistema inestable con un retardo menor que 1.5 veces la constante de tiempo, limitándose ésta estrategia al caso de primer orden. Igualmente podemos encontrar trabajos que se enfocan a los sistemas de alto orden inestables [7] aunque, las restricciones son diversas, como el sólo tener un polo inestable, además de no poder

tener un retardo mayor a la constante de tiempo del sistema.

El uso de control discreto para afrontar el reto de sistemas inestables con retardo se ha utilizado con anterioridad [8], sin embargo, esta estrategia se limita a sistemas de primer orden y a retardos por debajo de la constante de tiempo del sistema.

En este artículo se propone un método de control por retroalimentación de las variables de estado usando un observador digital. Para esto, se realiza la reubicación de los polos en la zona de estabilidad en el plano “ $z$ ” garantizando la estabilidad de un sistema aun cuando éste sea inestable, contenga un gran retardo, sea de alto orden o contenga ceros en su dinámica. Se considerará un retardo como “grande” cuando éste sea más mayor a la constante de tiempo dominante del sistema. La estrategia propuesta se lleva a cabo en un sistema físico.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera; en la Sección II se presenta la clase de sistemas considerados en este trabajo; en la Sección III, la discretización de la planta, posteriormente en la Sección IV se muestra la representación en espacio de estados. En la Sección V se presenta la metodología para la reubicación de los polos. En la Sección VI se presenta la implementación del observador digital. Los resultados de simulación se presentan en la Sección VII. En la Sección VIII se muestra la estrategia de control implementada en un sistema físico; en la Sección IX se presentan las limitaciones de hardware que se tienen al implementar la estrategia de control propuesta y finalmente se dan las conclusiones.

## II. SISTEMAS UTILIZADOS.

Considere un sistema lineal con una entrada, una salida y un retardo de tiempo a la entrada.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s} = G(s) e^{-\tau s} \quad (1)$$

Donde  $Y(s)$  es la señal de salida y  $U(s)$  es la señal de entrada,  $\tau \geq 0$  es el retardo conocido,  $N(s)$  y  $D(s)$  son los polinomios de la variable compleja  $s$  y  $G(s)$  es la función de transferencia sin retardo. Se aplica una estrategia de control basada en una retroalimentación de salida de acuerdo a la Ec (2).

$$U(s) = [R(s) - Y(s)]K \quad (2)$$

Por lo tanto la función de transferencia del sistema considerando la retroalimentación está dada por la Ec (3).

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)e^{-\tau s}}{1 + KG(s)e^{-\tau s}} \quad (3)$$

La ecuación característica contiene al término exponencial del retardo, ocasionando que la estabilidad quede en función de éste, lo cual es poco práctico; por lo tanto esta estrategia de control es limitada.

### III. DISCRETIZACIÓN DE LA PLANTA.

Partiendo del sistema lineal inestable con retardo en el tiempo que se tiene en la Ec. (4), se considera la discretización del sistema con un retenedor de orden cero (ROC).

$$G(s) = \frac{b_0 s^M + b_1 s^{M-1} + \dots + b_{M-1} s + b_M}{a_0 s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + b_N} e^{-\tau s} \quad (4)$$

El tiempo de muestreo  $T$  está definido por la Ec (5), donde  $n \in \mathbb{N}$ . El retardo  $e^{-n\tau s}$  en el dominio discreto se mapea como “ $n$ ” polos en el origen ( $z^{-n}$ ), por lo tanto la función discreta considerando el retardo queda expresada de acuerdo a la Ec (6).

$$T = \frac{\tau}{n} \quad (5)$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})(z^{-n})$$

$$Z \left\{ \frac{b_0 s^M + b_1 s^{M-1} + \dots + b_{0M-1} s + b_M}{s(a_0 s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{0N-1} s + b_N)} \right\} \quad (6)$$

De lo cual, obtenemos una función de transferencia discreta de la siguiente forma:

$$G(z) = \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_{0M-1} z + b_M}{z^n (a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{0N-1} z + b_N)} \quad (7)$$

### IV. REPRESENTACIÓN EN ESPACIO DE ESTADOS.

Para un sistema de datos discretos, donde todas las variables están definidas en la variable de tiempo discreto  $KT$ , las ecuaciones de estado tienen la forma de ecuaciones en diferencia de primer orden.

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{X}(k) + \mathbf{B}u(k) \quad (8)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{X}(k) + \mathbf{D}u(k) \quad (9)$$

El diagrama correspondiente a las Ecuaciones (8) y (9) se muestra en la Figura 1.

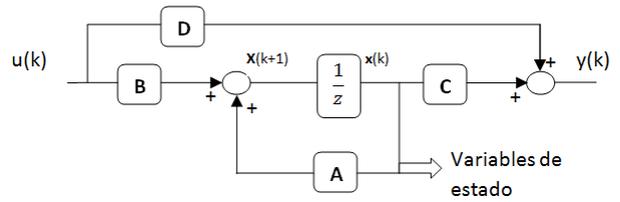


Figura 1. Diagrama a bloques de un sistema discreto en representación de espacio de estados.

Existen infinitas representaciones en espacio de estados para un solo sistema, una de ellas se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (10)$$

$$y(k) = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Las Ecuaciones (10) y (11) corresponden a las ecuaciones de estado del sistema discreto de la Ec (7)

### V. REUBICACIÓN DE POLOS PARA ESTABILIZAR EL SISTEMA.

Las ecuaciones de estado que aparecen en la Ec(10), cuentan con ciertas características únicas de gran utilidad en el análisis y diseño de sistemas de control lineales de datos discretos. Los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  que corresponden a los polos de la función de transferencia de lazo cerrado, pueden asignarse de manera arbitraria mediante retroalimentación de estados, mientras el sistema sea controlable de acuerdo a la Ec (12).

$$u(k) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(k) \quad (12)$$

Donde  $\mathbf{F}$  es la matriz de retroalimentación y está dada por:

$$\mathbf{F} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad \dots \quad f_n] \quad (13)$$

donde  $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$  son constantes reales

Al sustituir la entrada  $u(k)$  de la Ec.(12) en la Ec.(8), se obtiene la Ec (14) correspondiente a las ecuaciones de estado del sistema de lazo cerrado.

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(k) \quad (14)$$

La ecuación característica del sistema a lazo cerrado está dada por la Ec (15).

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}| = 0 \quad (15)$$

Sustituyendo los valores de matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  de la Ec(10) y la matriz  $\mathbf{F}$  de la Ec(13), obtenemos la ecuación característica:

$$z^n + z^{n-1}(a_1 + f_1) + z^2(a_2 + f_2) \dots + z(a_{n-1} + f_{n-1}) + (a_n + f_n) = 0 \quad (16)$$

## VI. IMPLEMENTACIÓN DE UN OBSERVADOR DIGITAL.

Una parte importante de la teoría de control óptimo del sistema digital consiste en la retroalimentación de las variables de estado. Desafortunadamente, en la práctica no siempre se tiene acceso a todas las variables de estado, y en general, sólo pueden medirse las salidas del sistema; por consiguiente, cuando se requiere la retroalimentación de todas las variables de estado, y no se tiene acceso a ellas, es necesario “observar” los estados a partir de la información contenida en la salida y en las variables de entrada.

Para este trabajo, el observador es diseñado utilizando la representación de estados obtenida en la Sección IV para poder realizar la retroalimentación estática de los estados estimados. El diagrama del sistema con el observador se muestra en la Figura 2.

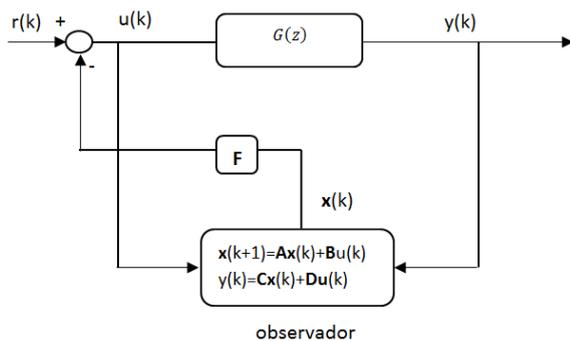


Figura 2. Sistema de control digital con observador de estados.

Existen muchas formas de diseñar el observador de estados digital y en general, hay más de una forma para juzgar la proximidad entre los estados del sistema y los estados estimados. De manera intuitiva el observador de estados debe tener las mismas ecuaciones de estado que el sistema original; sin embargo, el observador ha de poseer una configuración con  $u(k)$  y  $y(k)$  como entradas y la capacidad de minimizar automáticamente en error entre los estados de la planta y los estados estimados. Ya que los estados del sistema no pueden medirse de manera directa, tampoco es posible compararlos con los estados del sistema. Como alternativa, se comparan  $y_e(k)$  y  $y(k)$ , donde:

$$y_e(k) = Cx(k) \quad (17)$$

Con base en lo mencionado hasta el momento, la configuración del observador de estados digitales se muestra en la Figura 3. El observador se plantea como un sistema de control retroalimentado con  $G$  como la matriz de ganancia de la retroalimentación.

El objetivo de diseño es seleccionar  $G$  de modo tal que  $y_e(k)$  tienda hacia  $y(k)$  en el menor tiempo posible. La ecuación de estados del observador a lazo cerrado corresponde a la Ec (18). Cuando  $y_e(k)$  es igual a  $y(k)$ , la Ec (18) toma la forma de la Ec(8) la cual es idéntica a la ecuación de estados del sistema original.

$$x(k+1) = (A - GC)x(k) + Bu(k) + Gy(k) \quad (18)$$

Una forma de alcanzar una convergencia rápida de los estados es diseñar  $G$  de modo tal que los valores propios de  $(A - GC)$  estén ubicados de manera apropiada en el plano  $z$ , es decir hacer que sea estable y que tenga una respuesta rápida.

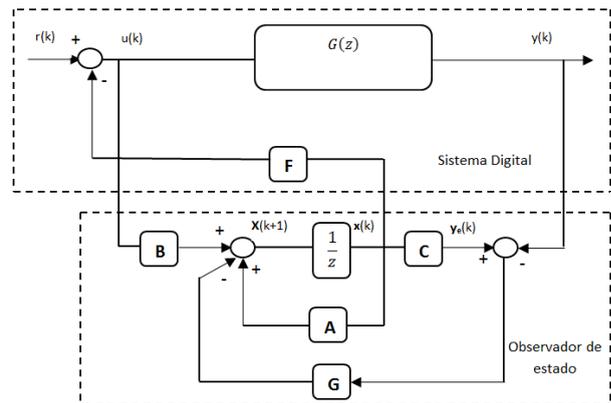


Figura 3. Sistema de control digital con observador de estados.

## VII. RESULTADOS DE SIMULACIÓN EN MATLAB – SIMULINK

El proceso descrito en las secciones previas, se evalúa mediante la simulación empleando Matlab – Simulink. Considere el sistema de tercer orden inestable con retardo que se muestra en la Ec (19).

$$G(s) = \frac{s + 0.2}{(s - 1)(s + 1.5)(s + 2)} e^{-2.4s} \quad (19)$$

Consideramos un valor de  $n=6$  y un ROC, obteniendo un periodo de muestreo de  $T=0.4$  seg. Discretizando la planta de la Ec (19) se obtiene la función de transferencia:

$$G(z) = \frac{1.632z^2 + 0.204z - 0.0143}{z^4(z^3 - 2.258z^2 + 1.474z - 0.286)} \quad (20)$$

Los polos del sistema discreto de la Ec (20) se encuentran ubicados en:

$$polos = [0, 0, 0, 0, 0, 0.559, 0.44, 1.49]$$

El lugar geométrico de las raíces obtenida en Matlab se muestra en la Figura 4 donde es fácil observar que el sistema a lazo abierto es inestable ya que uno de los polos se encuentra fuera del círculo unitario.

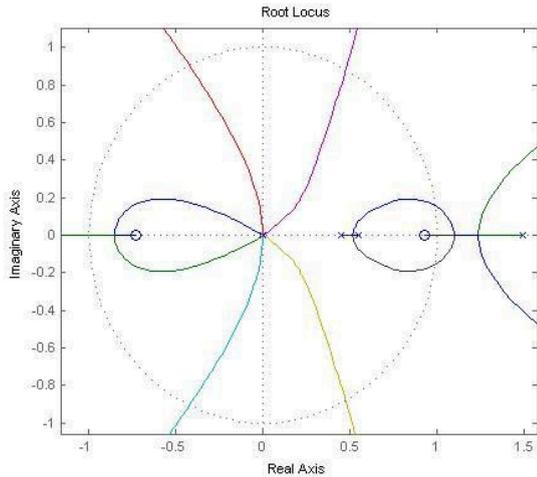


Figura 4. Lugar de las raíces del sistema discreto.

Se realizó la retroalimentación de estados estimados mediante la implementación de un observador discreto de acuerdo al procedimiento descrito en la sección VI. Los polos fueron reubicados en [0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8], obteniéndose el nuevo lugar de las raíces que se muestra en la Figura 5.

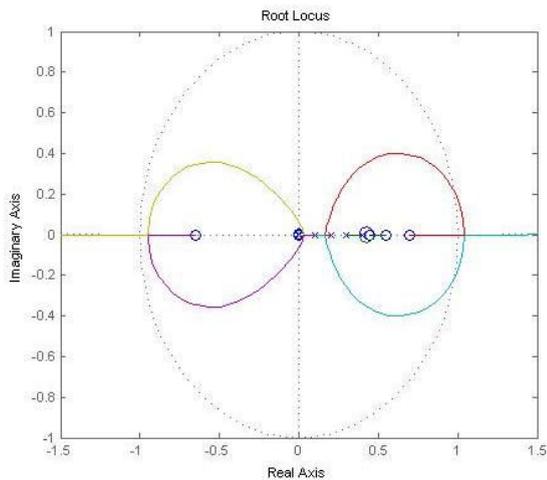


Figura 5. Lugar de las raíces del sistema con polos reubicados mediante la retroalimentación de estados estimados

La Figura 6 muestra el esquema implementado en Simulink para la retroalimentación de estados estimados, utilizando el observador. Al reubicar los polos dentro de la zona de estabilidad en el plano z, se logra estabilizar el sistema; la Figura 7 muestra la respuesta al escalón unitario obtenida del diagrama anterior, donde se observa que el sistema se logra estabilizar. El valor del vector de ganancia "G" es [12.3729 16.5876 11.1189 3.7266 2.5045 1.5237 2.3660 -4.2092 11.3667].

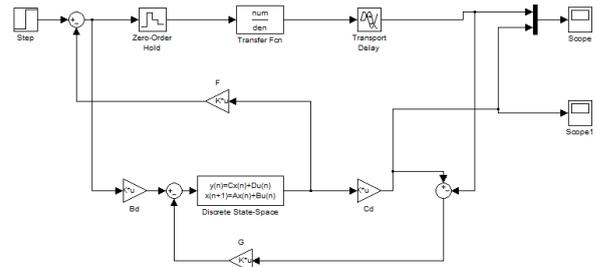


Figura 6. Diagrama en simulink de observador

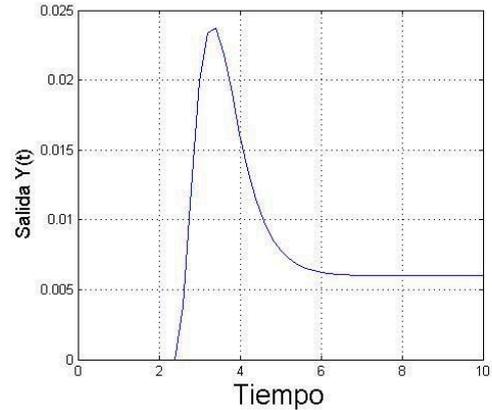


Figura 7. Respuesta del sistema con retroalimentación de estados estimados

### VIII. IMPLEMENTACIÓN DE LA PLANTA CON A.O Y EMPLEO DE TARJETA SENSO RAY PARA INTERFAZ CON SIMULINK.

Considere una planta de primer orden inestable la cual es implementada utilizando amplificadores operacionales, siendo el diagrama eléctrico del circuito el mostrado en la Figura 8.

$$G(s) = \frac{1}{s - 1} \quad (21)$$

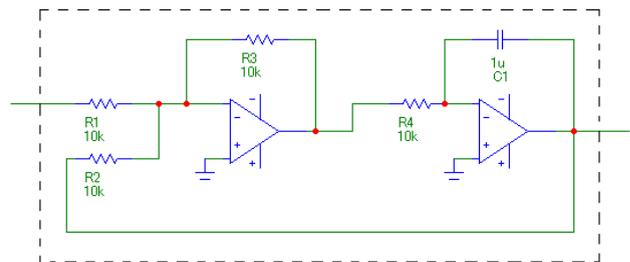


Figura 8. Diagrama eléctrico de la planta empleando amplificadores operacionales

A partir de la función de transferencia mostrada en la figura (21) se puede observar que la constante de tiempo inestable del sistema es de 1. Para realizar la interfaz con la computadora se utiliza la tarjeta de adquisición de datos SENSORAY 7505PDIN, modelo 626; mediante la cual se toman muestras de la planta (sistema analógico) y se generan datos que pueden ser manipulados por Matlab/Simulink (sistema digital).

El diagrama de bloques del programa en simulink que envía la señal de escalón a la planta y recibe la respuesta de la misma se muestra en la Figura 9. El sistema de control empleado es el observador digital. Se considera un retardo  $\tau=2.2$  y un valor de  $n=30$ . Realizando la retroalimentación de los estados estimados para reubicar los polos dentro de la zona de estabilidad (Se colocan 30 polos en el origen y un polo en 0.9), obtenemos la respuesta de la planta al escalón unitario; en la Figura 10 se muestra el transitorio y en la Figura 11 se observa que el voltaje se estabiliza en aproximadamente 2.2 Volts.

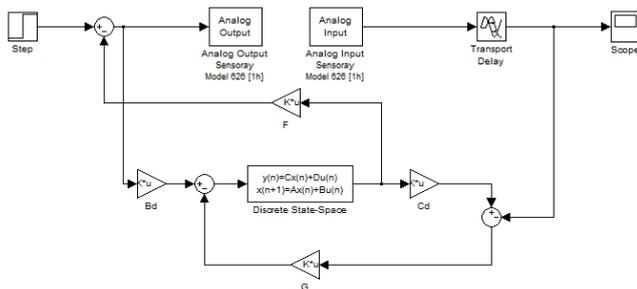


Figura 9. Diagrama eléctrico de la planta empleando amplificadores operacionales.

Se comprueba que el sistema propuesto, puede estabilizar sistemas físicos inestables con retardos mayores a dos veces la constante de tiempo dominante del sistema.

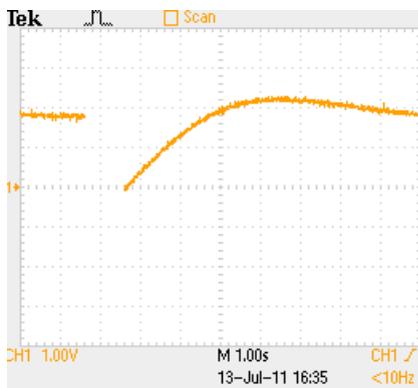


Figura 10. Transitorio de la respuesta de la planta



Figura 11. Estado permanente de la respuesta de la planta.

### IX. LIMITACIONES DE HARDWARE PARA LOGRAR LA ESTABILIDAD DEL SISTEMA.

El voltaje máximo que se puede obtener de la tarjeta de adquisición de datos es de  $\pm 10$  Volts, lo cual se convierte en una limitante, ya que si el voltaje de salida de la planta o alguna acción de control alcanzan un valor fuera de este rango, el sistema se satura. Consideremos la planta de la Ec. 21, donde el tiempo de retardo  $\tau$  es de 2.2 segundos,  $n$  es 30; por lo tanto se obtiene el siguiente tiempo de muestreo:

$$T = \frac{2.2}{30} = 0.073 \text{ s} \quad (22)$$

Discretizando el sistema considerando un ROC, se obtiene la Ec (23).

$$G(z) = \frac{0.0769}{z^{31} - 1.076z^{30}} \quad (23)$$

Treinta polos de este sistema se encuentran ubicados en el origen uno de los polos se encuentra fuera del círculo unitario, generando un sistema inestable a lazo abierto. Como el sistema es inestable realizamos la reubicación de los polos todos en el origen, para generar una respuesta rápida del sistema. Los polos del observador se ubican en el mismo sitio de los polos reubicados del sistema. La respuesta del sistema una vez realizada la retroalimentación estática de estados estimados se muestra en la Figura 12.

**Observaciones.** En la Figura 12 se puede observar que el sistema se estabiliza más rápido que en la reubicación anterior, además que, se obtiene un valor final considerablemente más pequeño (0.08V); Si bien, podría parecer que esta reubicación es más efectiva que la mostrada en la sección anterior, presenta la desventaja que la acción de control requiere un voltaje más alto (ver figura 13), debido a que el polo inestable debe ser movido hasta el origen. La acción de control, como se puede apreciar en la figura 13, es mayor al voltaje que proporciona la tarjeta de adquisición de datos, generando que ésta se sature y el sistema no se pueda estabilizar en un resultado experimental haciendo imposible que el resultado de simulación, coincida con el resultado experimental.

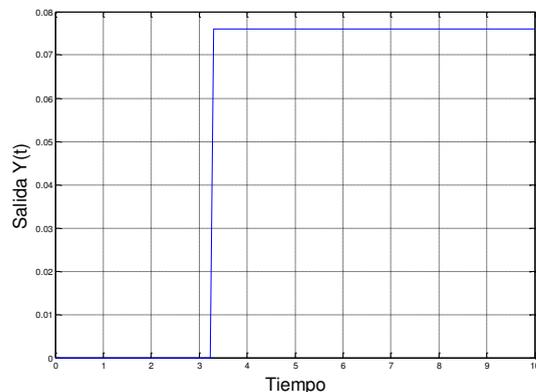


Figura 12. Respuesta del sistema con retroalimentación de estados estimados.

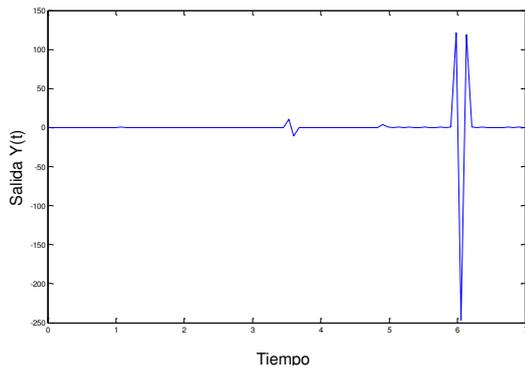


Figura 13. Acción de control reubicando todos los polos en cero.

## X. CONCLUSIONES.

Afrontar los problemas de estabilización de sistemas con retardo mediante control discreto, representa una forma útil y práctica para abordar dichos sistemas.

La estabilización del sistema se puede hacer mediante la retroalimentación estática de estados; sin embargo, cuando no tenemos el acceso directo a las variables de estado se diseña un observador para poder reubicar los polos del sistema dentro de la región de estabilidad. Se comprobó que utilizando este método se logra estabilizar una planta física inestable, obteniendo una respuesta más rápida y considerando tiempos de retardo más grandes (arriba de 2 veces la constante de tiempo del sistema) en comparación a utilizar otras estrategias de control, tales como una retroalimentación estática de la salida[8], u otros esquemas de tipo observador [6] que sólo alcanzan retardos menores a 1.5 veces la constante de tiempo del sistema. Se comprobó que la estrategia puede estabilizar sistemas de alto orden inestables con grandes retardos.

## REFERENCIAS.

- [1] Astrom K. J., Wittenmark B. (1997). Computer Controlled Systems: theory and design, (3<sup>rd</sup> Ed.), Prentice Hall.
- [2] Skogestad S. (2003). Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Journal of Process Control* 13, 291-309.
- [3] Smith O. J. M. (1957). Closer control of loops with dead time. *Chemical Engineering Progress* 53,(5), 217-219.
- [4] Palmor Z.J. (1996). Time-delay compensation Smith
- [5] Torrico B.C., Normey J.E. (2005). 2dof discrete dead time compensator for stable and integrative processes with dead time. *Journal of Process Control* 15, 341-352.
- [6] Seshagiri R.A., Rao S.R., Chidambaram M. (2007). Simple analytical design of modified Smith Predictor with improved performance for unstable first-order plus time delay (FOPTD) processes. *Industrial and Engineering Chemistry Research* 46(13), 4561-4571
- [7] Omar Arid González Nájera. Estabilización de sistemas de segundo orden con retardo: Aplicación a sistemas de alto orden. Master's thesis, IPN, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Culhuacan, Junio 2009.
- [8] J.F. Márquez, B. Del Muro, M. Velasco, and J. Alvarez. Control Based in an Observer Scheme for First-Order Systems with Delay. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 9, 2010.